Title	S^{1}上の群作用の位相的エントロピーについて(力学系の研究)
Author(s)	渡辺, 展也
Citation	数理解析研究所講究録 (1989), 696: 32-37
Issue Date	1989-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/101431
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
696巻 1989年 32-37

S^1上の群作用の位相的エントロピーについて

早大 教育学部 渡辺展也
Nobuya Watanabe

葉層構造のエントロピーの定義が Ghys, Langevan, Walczak によって [G-L-W] で与えられた。葉層構造が suspension で得られている場合は，それは群作用のエントロピーと関係している。ここでは 曲面の基本群のS^1への作用について，エントロピーと作用のオイラー数の関係を調べた。

Σ_g を 向きづけ可能閉曲面で ジーナスが g個のものとする。Σ_gの基本群をΓ^gとする。Γ^gの生成集合Γ_0^gを

$$\Gamma_0^g=\{\alpha_i,\beta_i,\alpha_i^{-1},\beta_i^{-1}\ ;\ 1\leqq i\leqq g\}$$

とする。ここで Γ_0^gはΓ^gを次のように表現するとする。

$$\Gamma^g=\langle\alpha_i,\beta_i,\ 1\leqq i\leqq g\ ;\ \prod_{i=1}^{g}\alpha_i\beta_i\alpha_i^{-1}\beta_i^{-1}\rangle$$

G^+をS^1の向きを保つ同相写像のなす群とする。準同型写像 $\phi:\Gamma^g\longrightarrow G^+$ に対して，$\chi(\phi)$ を ϕに付随したS^1-bundle のEuler数とする。すると Milnor [Mi] と Wood [Wo] によって $|\chi(\phi)|\leqq|\chi(\Sigma_g)|$ という不等式が成り立つ。

次に $gr(\Gamma^g,\Gamma_0^g)$をΓ^gのΓ_0^gに関する指数的成長度とする。

$h(\phi, \Gamma_0^g)$ を ϕ の Γ_0^g に関する位相的エントロピーとする。

定理は次の2つである。

定理1　$\phi : \Gamma^g \longrightarrow G^+$ を準同型写像とする。$\chi(\phi) \neq 0$ なら $h(\phi, \Gamma_0^g) > 0$。

定理2　$\phi : \Gamma^g \longrightarrow G^+$ を準同型写像とする。$|\chi(\phi)| = |\chi(\Sigma_g)|$ なら，$h(\phi, \Gamma_0^g) = g\gamma(\Gamma^g, \Gamma_0^g)$。

1　準備　Γ を有限生成群とし Γ_0 を Γ の対称生成集合とする。(X, d) を compact 距離空間とし $\phi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ を準同型とする。Γ は Γ_0 に関する語ノルムを $\|\cdot\|$ とする。

$B_n(\Gamma, \Gamma_0) = \{\gamma \in \Gamma ; \|\gamma\| \leqq n\}$ とおく。

X の新しい距離 d_n を次で定義する。$d_n(x, y) = \max_{\gamma \in B_n} d(\phi(\gamma)x, \phi(\gamma)y)$。次に n を自然数 ε を正の数とする。$E \subset X$ が (n, ε)-separated set とは，任意の $x, y \in E$ $(x \neq y)$ に対して $d_n(x, y) > \varepsilon$ となるときにいう。

$$t(n, \varepsilon) = \mathrm{Max}\{\# E \mid E \text{ は } (n, \varepsilon)\text{-separated set}\}$$

とおく。すると ϕ の Γ_0 に関するトポロジカルエントロピーが次で定義される。

$$h(\phi, \Gamma_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log t(n, \varepsilon)。$$

命題1　$\phi, \psi : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Homeo}(X)$ を準同型とする。もし連続な全射 $f : X \longrightarrow X$ があって $f \circ \phi = \psi \circ f$ なら $h(\phi) \geqq h(\psi)$。

$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Homeo}(S^1)$ に対しては位相的エントロピーは常に

0だが，同じようにして次が証明される。

命題2　$\phi:\Gamma\to \mathrm{Homeo}(S^1)$を準同型とする。すると
$h(\phi,\Gamma_0)\leqq gr(\Gamma,\Gamma_0)\equiv \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log \# B_n(\Gamma,\Gamma_0)$.

次にKを一次元多様体として　$\phi:\Gamma\to \mathrm{Homeo}(K)$を準同型とする。　$z\in K$の軌道が　resilient軌道であるとは，γ_1, $\gamma_2\in\Gamma$が存在して　$\phi(\gamma_1)z\neq z$，$\lim_{n\to\infty}\phi(\gamma_2^n\gamma_1)z=z$となること。

命題3　([G-L-W])　もしresilient軌道が存在するならϕの位相的エントロピーは正。

2．定理1の証明　　定理1の証明には，次の命題を使う。

命題4　([Ma-1])　次は同値。$\phi:\Gamma\to G^+$を準同型とする。

(1)　$\phi^*(e_R)\neq 0$

(2)　ϕの極小集合Mと$\gamma\in\Gamma$があって$\phi(\gamma)|M\neq id$，$\phi(\gamma)$はMに固定点を持つ。ここでe_Rは　G^+の有界オイラー類。

定理1の証明をする。$\phi^*(e_R)\neq 0$としてよい。　$S_\gamma=\{x\in S^1;\phi(\gamma)x\neq x\}$とおく。命題4より$\phi$の極小集合$M$と$\gamma\in\Gamma$があって$S_\gamma\cap M\neq\phi$，$S_\gamma\neq S^1$となる。　$x\in S_\gamma\cap M$とする。xを含むS_γの連結成分[redacted]は開区間である。$y=\lim_{n\to\infty}\phi(\gamma^n)x$　は上の開区間の端点となる。$M\ni y$となる。ϕの軌道はMで稠密なので，yの軌道は開区間と交わる。よってyはresilient軌道である。

3 定理2の証明　Σ_gには負の定曲率のRiemann計量が入る。するとΣ_gのuniversal coveringはPoincare円板Δと同一視されΓ^gはΔにcovering transformationとして作用しこれは$\partial\Delta=S^1$の作用を定める。この作用はFuchsian作用と呼ばれる。Goldmanは[G]で$\phi:\Gamma^g\to PSL(2,\mathbb{R})=\mathrm{Isom}^+(\Delta)$がFuchsianであるためには$\chi(\phi)=\chi(\Sigma_g)$であることを示した。よって定理2を証明するにはFuchsian作用$\hat{\phi}$に対してやればよい。なぜなら$\phi:\Gamma^g\to G^+$を準同型で$|\chi(\phi)|=|\chi(\Sigma_g)|$なるものとすると松本氏[Ma-2]により$\phi$と$\hat{\phi}$はsemi conjugateする。すると$h(\hat{\phi};\Gamma^g_0)\leqq h(\phi,\Gamma^g_0)\leqq gr(\Gamma^g,\Gamma^g_0)$だからである。

$M_n=\#(B_n(\Gamma^g,\Gamma^g_0)-B_{n-1}(\Gamma^g,\Gamma^g_0))$とおく。すると$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log M_n=gr(\Gamma^g,\Gamma^g_0)$となる。又，$\Gamma^g$をFuchsian群$\phi(\Gamma^g)$と同一視する。$\Gamma^g$による$S^1$の点の境界展開を考える。([B].[S])。各$\gamma\in\Gamma^g_0$に対して$C(\gamma)=\{z\in\Delta;|D\gamma(z)|=1\}$とおく。すると$\gamma C(\gamma)=C(\gamma^{-1})$である。$C(\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma^g_0)$で囲まれる$4g$角形RはΓ^gの基本領域である。Γ^g_0の元を$C(\gamma_1),\cdots C(\gamma_{4g})$が反時計回りに$R$を囲うように$\gamma_1,\cdots,\gamma_{4g}$と名前をつける。$P_i$と$Q_i$を反時計回りの順で$C(\gamma_i)$の端点とする。$f:\partial\Delta\to\partial\Delta$を$f|[P_i,P_{i+1})(x)=\gamma_i x$で定義する。$x\in\partial\Delta$の$f$-展開とは列$x_f=$

$\gamma_{i_0}\gamma_{i_1}\cdots,\ \gamma_{i_j}\in\Gamma_0^g$ のことで $f^n(x)\in[P_{i_n}, P_{i_n+1})$ となっているもののことである。$\Sigma^+=\{x_f ; x\in\partial\Delta\}$ とする。この対応は1対1である。$F(\Sigma^+)$ を Σ^+ の元になる有限列の集合とする。C. Series は[5]の中で各 γ は $F(\Sigma^+)$ の中に唯一の一番短かい代表元 ω_γ を持つことを示している。$\omega=e_1e_2\cdots e_k\in F(\Sigma^+)$ に対して $Z(\omega)=\{x\in\partial\Delta ; x_f=e_1e_2\cdots e_k\cdots\}$ とおく。すると $Z(\omega)$ は区間となる。a_i を $[P_i, P_{i+1})$ の中点とし $\varepsilon=\frac{1}{3}\min_i|[P_i,P_{i+1})|$ とおく。$E_n=\{\gamma^{-1}a_{i_n} ; \omega_\gamma=\gamma_{i_0}\cdots\gamma_{i_n},\ \gamma\in B_n-B_{n-1}\}$ とおく。各 $\gamma\in B_n-B_{n-1}$ に対して、γ は $Z(\omega_\gamma)$ を $[P_{i_n}, P_{i_n+1})$ に写す。ここで $\omega_\gamma=\gamma_{i_0}\cdots\gamma_{i_n}$。よって E_n は (n,ε)-separated set である。$s(n,\varepsilon)\geq\#E=M_n$ だから定理2の証明が終った。

参考文献

[B] R. Bowen, Hausdorf dimension of quasi-circles, Publ. Math. I.H.E.S, 50 (1970), 11-25.

[G-L-W] E. Ghys, R. Langevin and P. Walczak, Entropie geometrique des feuilletages, Acta Math. 168 (1988), 105-142.

[Go] W.M. Goldman, Discontinuous groups and the Euler class, Thesis, Berkley.

[Ma-1] S. Matsumoto, Numerical invariants for semiconjug acy of homeomorphisms of the circle, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 163–168.

[Ma-2] S. Matsumoto, Some remarks on foliated S^1-bundle, Invent. Math. 90, (1987) 343–358.

[Mi] J. Milnor, On the existence of a connection with curvature zero, Comment. Math. Helv. 32 (1958), 215–223

[S] C. Series, Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 6 (1986), 601–625.

[Wo] J. Wood, Bundles with totally disconnected structure group, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 257–273.